NO.
Date 29/03/2018

Μάθημα 7ο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Εκτίμηση σε Διάστημα.

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τδ. από έναν πληθυσμό με σ.π.π. ή σ.π. $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$

θ: άγνωστη παράμετρος

Μιλήσαμε για εκτίμηση σε σημείο και αξιολόγηση αυτών των εκτιμήσεων.

Ζητάμε ένα διάστημα της μορφής $(L(\underset{\sim}{X}), U(\underset{\sim}{X}))$ τέτοιο ώστε να καλύπτει την άγνωστη παράμετρο θ ένα μεγάλο ποσοστό φορών. Το ποσοστό αυτό φορών θα λέγεται βαθμός εμπιστοσύνης, και συμβολίζεται με: $100(1-a)\%$ με το a να παίρνει τις τιμές, συνηθέστερα, 5%, 1%, 10%.

ΔΕ95: $P\left(L(\underset{\sim}{X}) \leq \theta \leq U(\underset{\sim}{X})\right) = 100(1-a)\%$

Τι πρακτικά σημαίνει αυτό;

Αν επαναλάβω το πείραμα 100 φορές και υπολογίσω κάθε φορά τα (L, U) το πραγματικό θ ανήκει σε αυτό το διάστημα τις 95 φορές

Μεθοδολογία κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης με τη βοήθεια Αντιστρέψιμης Ποσότητας.

1ο ΒΗΜΑ: Βρίσκω μία συνάρτηση $Q = Q(\underset{\sim}{X}, \theta)$ με κατανομή ανεξάρτητη του θ.

2ο ΒΗΜΑ: Ξεκινώντας από τη σχέση: $P(q_1 \leq Q(x, \theta) \leq q_2) = 1-a$ προσπαθώ να το φέρω στη μορφή:

$$P(L(\underset{\sim}{X}) \leq \theta \leq U(\underset{\sim}{X})) = 1-a.$$

NO.

Date

3º ΒΗΜΑ: Να προσδιορίσω κατάλληλα κατάλληλα τα q_1, q_2

Ο κατάλληλος αυτός προσδιορισμός, αν είναι εφικτός, είναι τα q_1, q_2 που αντιστοιχούν στο διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους.
Διαφορετικά, αν δεν είναι εφικτός, τα q_1, q_2 προσδιορίζονται έτσι ώστε να έχουμε διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών.
(Θα εξηγηθεί αργότερα).

Παράδειγμα 1º

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 γνωστή
Δ.Ε. για το μ $100(1-a)\%$.

Θέλουμε να βρούμε την σ.σ που περιέχει όλη την πληροφορία για την παράμετρο $\Longrightarrow$ η επαρκής

$$Q = Q(X_1, \ldots, X_n, \mu)$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Το $\sum X_i$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντιστρέψιμη ποσότητα γιατί: 1ον δεν έχει μέσα το μ και 2ον η κατανομή της εξαρτάται από το μ

Άρα θα την μετατρέψω:

$$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}} \sim N(0,1)$$

← τυπική κατανομή

έχω επιβεβαιώσει το 1º βήμα.

Άρα: $Q = Q(X_1, X_2, \ldots, X_n, \mu) = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

• Τώρα πρέπει να επιβεβαιώσω ότι είναι αντιστρεπτό

$$P\left(q_1 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le q_2\right) = 1-a \quad (1)$$

$$P\left(q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

$$P\left(\bar{X} - q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} - q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

Άρα αντιστρέφεται.

• Τα q_1, q_2 θα προσδιοριστούν έτσι ώστε το Δ.Ε. να είναι ελάχιστο.

Τα q_1, q_2 είναι το ένα συνάρτηση του άλλου

$$l = (q_2 - q_1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Έχω πρόβλημα ελαχιστοποίησης
⇓
παραγωγίζω για να δω που μηδενίζεται

Παραγωγίζω ως προς q_1:

$$\frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

Το πρόβλημα είναι αυτό
πρέπει να βρω το q_2
Έχω μόνο τη σχέση (1) Άρα από εκεί.

Αθροιστική: $F_Q(q_2) - F_Q(q_1) = 1-a$

Παραγωγίζω ως προς q_1:

$$f_Q(q_2)\frac{dq_2}{dq_1} - f_Q(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)} \quad (3)$$

Άρα η (2) θα γίνει:

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{f_Q(q_1) - f_Q(q_2)}{f_Q(q_2)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

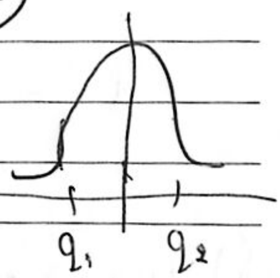
Κάνω αντικατάσταση τη σ.π.π. της κανονικής κατανομής.

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{\cancel{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} q_1^2} - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} q_2^2}}{\cancel{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} q_2^2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow q_1^2 = q_2^2 \Rightarrow q_1 = q_2$$ Απορρίπτεται

$$q_1 = -q_2$$

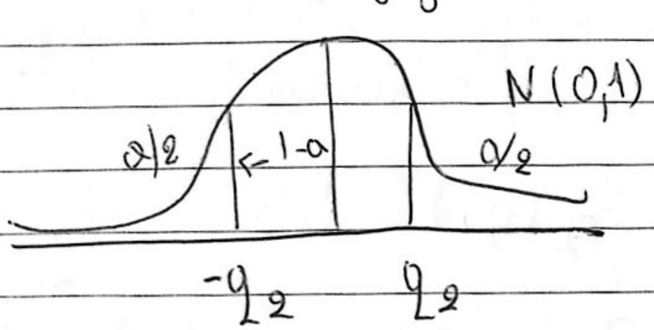
Είτε θα βρω πρόσημο της παράστασης
είτε θα δω αν μηδενίζεται η παράγωγος



2η παράγωγος:

$$\frac{d^2 l}{dq_1^2} = -\frac{1}{2} 2 q_1 e^{-q_1^2/2} > 0$$ άρα όντως ελάχιστο

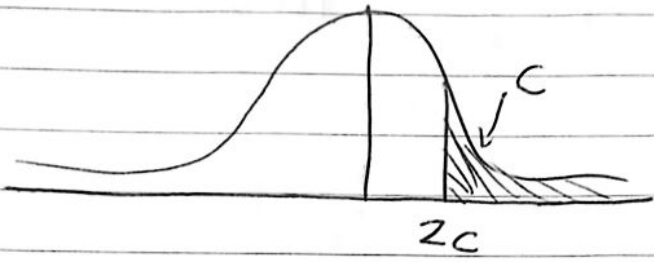
Την 2η παράγωγο δε χρειάζεται να τη παίρναμε



$$q_2 = z_{\alpha/2}$$

Z_c : είναι το σημείο εκείνο της $N(0,1)$ που είναι τέτοιο ώστε :

$$P(Z \geq Z_c) = c$$



Παράδειγμα 2ο

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 άγνωστο

Δ.Ε. για το μ.

Ξεκινώντας όπως πριν καταλήγω σε αυτή τη σχέση:

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Δε μπορώ να την χρησιμοποιήσω ως αντιστροφή γιατί το σ είναι άγνωστο. Θα πρέπει να το προσδιορίσω.

Όταν η δειγματοληψία είναι κανονική κατανομή τότε μπορώ να χρησιμοποιήσω την σχέση

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$ με $\bar{X}, S^2$ ανεξάρτητα.

Πρέπει να "πλέξω" κάπως τις σχέσεις μας:

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_v/v}} \sim t_v$$

$$Q = \frac{\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \Big/ (n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$$

NO.

Date

όπως στο προηγούμενο συνεχίζω:

$$P(q_1 \leq Q \leq q_2) = 1-a \Rightarrow$$

$$P\left(\bar{X} - q_2 \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - q_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-a$$

$$l = (q_2 - q_1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1\right)\frac{S}{\sqrt{n}} \quad \frac{\text{όπως}}{\text{προηγούμενο}}$$

$$\frac{f_Q(q_1) - f_Q(q_2)}{f_Q(q_2)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{q_1^2}{n-1}\right)^{-n/2} - 1 + \left(\frac{q_2^2}{n-1}\right)^{-n/2}}{\left(1 + \frac{q_2^2}{n-1}\right)^{-n/2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Για να γίνουν οι ενδείξεις ίσοι (έχω ίδια δύναμη άρα θέλω ίδιο ενδείξη)

$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow q_1^2 = q_2^2 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} q_1 = q_2 \\ q_1 = -q_2 \end{matrix}}$$ → απορρίπτεται

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = -q_2}$$

$$\boxed{q_2 = t_{n-1,\,a/2}}$$

όπου $t_{n-1,c}$ το σημείο τ.ω. $P(Q \geq t_{n-1,c}) = c$

Παράδειγμα 3ο

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$ όπου μ, σ^2 : άγνωστα

Θέλουμε Δ.Ε. για την διακύμανση σ^2

Λύση

Γνωρίζουμε 6.6. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

(Θα τη χρησιμοποιήσουμε)

$$P\left(q_1 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq q_2\right) = 1-a \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right) = 1-a$$

$$\ell = (n-1)S^2\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)$$

$$\frac{d\ell}{dq_1} = (n-1)S^2\left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\frac{dq_2}{dq_1}\right) =$$

$$= (n-1)S^2\left(-\frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)}\right)$$

$$\frac{dl}{dq_1} = (n-1)S^2\left(\frac{q_1^2 f_Q(q_1) - q_2^2 f_Q(q_2)}{q_1^2 q_2^2 f_Q(q_2)}\right)$$

$$Q \sim \chi^2_{n-1} \equiv \text{Γάμμα}\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)$$

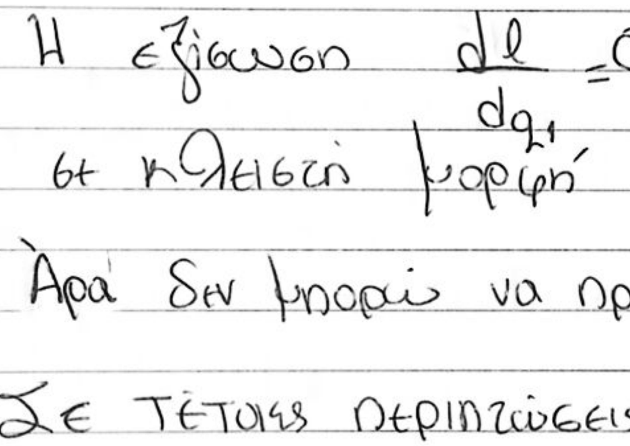
$$f_Q(q) = \frac{q^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-q/2}}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \quad q > 0$$

Η εξίσωση $\frac{dl}{dq_1} = 0$ δεν μπορεί να "λυθεί" σε κλειστή μορφή (Να δώσει κλειστή λύση)

Άρα δεν μπορώ να προσδιορίσω Δ.Ε. ελαχίστου μήκους

Σε τέτοιες περιπτώσεις προσδιορίζουμε τα q_1, q_2 έτσι ώστε να προκύπτει Δ.Ε. ίσων ουρών

<u>Δηλ.</u> $P(Q \geq q_2) = \alpha/2$ $P(Q \leq q_1) = \alpha/2$
(ίσων ουρών)



"όλο" κάνει 1.
εδώ είναι το 1-α
Περισσεύει το α
Άρα $\alpha/2$, $\alpha/2$

$$q_1 = \chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}$$

$$q_2 = \chi^2_{n-1, \alpha/2}$$

NO

Date

Παράδειγμα (4°)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ.

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta$$

Λύση

Επαρκής σ.σ. : $\prod f(x_i,\theta) = e^{-\Sigma x_i} e^{n\theta}$, π.ο. εξαρτάται από θ

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq \theta \\ X_2 \geq \theta \\ \vdots \\ X_n \geq \theta \end{array}\right\} \quad \| X_{(1)} \geq \theta \|$$

η επαρκής σσ.

$Q = Q(X_1, X_2, \dots X_n, \theta)$

Θα προσδιορίσω την σ.π.π. του $X_{(1)}$

Είδαμε: $F_{X_{(1)}}(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n$

$f_{X_{(1)}}(t) = n\,(1 - F_X(t))^{n-1} f_X(t)$

Με απόδειξη

$f_{X_{(1)}}(t) = n \cdot e^{-n(t-\theta)}$, $t \geq \theta$ ← ειδική περίπτωση

όχι ανεξάρτητη

μου δίνει μια ιδέα για το τι να βάλω στην Q

$Q \overset{?}{=} X_{(1)} - \theta$

Θα προσπαθήσω την κατανομή του $Q = X_{(1)} - \theta$

$\Longrightarrow X_{(1)} = Q + \theta \Rightarrow dX_{(1)} = dQ$

$f_Q(q) = f_{X_{(1)}}(q+\theta) \cdot |1| = n \cdot e^{-nq}$, $q \geq 0$

$t \geq \theta \Rightarrow t - \theta \geq 0 \Rightarrow q \geq 0$

Τώρα μετατρέπουμε σε πιθανή αντιστρεπτή ποσότητα.

$$P(q_1 \leq X_{(1)} - \theta \leq q_2) = 1-a \Rightarrow$$

$$P(X_{(1)} - q_2 \leq \theta \leq X_{(1)} - q_1) = 1-a$$

Αν η f_Q είναι φθίνουσα τότε παραγωγίζω ως προς q_1

Διαφορετικά, δηλ. αν είναι αύξουσα, παραγωγίζω ως προς q_2

Στις προηγούμενες ασκήσεις οι κατανομές δεν ήταν γνησίως αύξουσες και φθίνουσες. Μηδενιζόταν η παράγωγος. Εδώ είναι καθαρά φθίνουσα.

$$l = q_2 - q_1$$

$$\frac{dl}{dq_1} = \frac{dq_2}{dq_1} - 1 = \frac{f_Q(q_1)}{f_Q(q_2)} - 1 = \frac{f_Q(q_1) - f_Q(q_2)}{f_Q(q_2)} =$$

$$= \frac{e^{-nq_1} - e^{-nq_2}}{e^{-nq_2}} > 0$$

l αύξουσα ως προς q_1 $\Rightarrow$ ελάχιστο το κάτω άκρο του π.ο. $\Rightarrow$ $\boxed{q_1 = 0}$

$$P(\overset{0}{q_1} \leq Q \leq q_2) = 1-a$$

$$\int_0^{q_2} n \cdot e^{-nq}\, dq = 1-a$$

NO.

Date

$$-e^{-nq}\Big|_0^{q_2} = 1-a \Rightarrow$$

$$1 - e^{-nq_2} = 1-a \Rightarrow e^{-nq_2} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -nq_2 = \ln a \Rightarrow \boxed{q_2 = -\frac{1}{n}\ln a} > 0$$

ΕΡΓΑΣΙΑ

ανεξάρτ. $\begin{cases} X_1, X_2, \ldots, X_n & \text{τ.δ. από την κανονική με } N(\mu_1, \sigma_1^2). \\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_m & \text{τ.δ. από την κανονική με } N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases}$

Να βρείτε:

(i) Δ.Ε. για το μ_1, μ_2 όταν σ_1^2, σ_2^2 γνωστές

(ii) Δ.Ε. για το μ_1, μ_2 όταν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ άγνωστες

(iii) Δ.Ε. για το $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ όταν μ_1, μ_2 άγνωστες

Υπόδειξη

(i) $\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ή $\bar{X} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n)$

$\bar{Y} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/m)$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

Επομένως η αντιστρεπτή που ψάχνω είναι:

$$Q = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

NO.

Date

(ii) $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1)$$

πρέπει να απαλλαγώ από το σ.

$\Downarrow$

Θα χρησιμοποιήσω το: $\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$

και $\frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim X^2_{m-1}$ ανεξάρτητα

$\Rightarrow$ όταν τις αθροίσω θα έχω:

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim X^2_{(n-1)+(m-1)}$$

Θα εμφανιστεί t

$$t = \frac{\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2(1/n+1/m)}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{\sigma^2}}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2}$$

(όπως άσκ. 2.)

NO.
Date

(iii) $X_1,\dots,X_n \to \dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{n-1}$

$Y_1,\dots,Y_m \to \dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{m-1}$

Ανεξάρτητα

$$\frac{\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (m-1)}{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (n-1)} \sim F_{m-1,n-1}$$

Δ.Ε. ίσων ουρών εδώ
(Δε μπορώ να βρω ελάχιστου μήκους)

Άσκηση 1.1 (1ο κεφάλαιο βιβλίου)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ τ.δ. $N(0,\theta)$

$T = \frac{1}{n}\sum X_i^2$. Αμερόληπτος του θ + βρες διακύμανση.

Λύση

$ET = \theta$

$EX^2 = \operatorname{Var}X + \cancel{(EX)^2}^{\,0} = \theta$

$\operatorname{Var}T = \frac{1}{n^2}\sum \operatorname{Var}X_i^2 = \frac{1}{n}\operatorname{Var}X^2$

$X \sim N(0,\theta) \Rightarrow \frac{X}{\sqrt{\theta}} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{X^2}{\theta} \sim \chi^2_1$

$\Rightarrow \operatorname{Var}\left(\frac{X^2}{\theta}\right) = 2 \Rightarrow \operatorname{Var}X^2 = \dots$

Άλλος τρόπος: $\operatorname{Var}X^2 = EX^4 - (EX^2)^2$

Άσκηση 1.2 → εκτός ύλης
Άσκηση 1.19 → εκτός ύλης
1.24 → εκτός

$Var X^2 = EX^4 - (EX^2)^2$

ροπές: $EX^k = \frac{1}{n} \sum X_i^k$

$$\left. \frac{d^4 m_x(t)}{dt^4} \right|_{t=0}$$

> Στην άσκηση 1.4
Υπόδειξη.
- Αποδείξτε ότι ανήκει στην εκθ. οικογ. κατανομών
- πότε επιτυγχάνεται η ισότητα στην C-R

> Σχετική αποτελεσματικότητα της T ως προς U.

$$T \text{ ως προς } U = \frac{Var U}{Var T}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod f(x,\theta) = K(\theta,n) \cdot (V - g(\theta))$$

> $Var \sum X_i = \sum Var X_i + 2 \sum_i \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$

Θα χρειαστεί στην 1.5

Μπορούμε: 1.17, 1.18, 1.20, 1.21, $\underbrace{1,22, 1.23}_{\text{Δύσκολες!}}$, 1.25